

Problème

NOTATIONS.

Dans tout ce problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

- E est l'espace vectoriel \mathbb{C}^N .

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E .

On note 0 l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité.

- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} .

$\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

- Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on désigne par $S_P(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f , par

$\mathcal{R}(f)$ l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$ et par $P(f)$ l'endomorphisme de E : $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).

- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , on appelle projecteur sur F parallèlement à G , l'endomorphisme $P_{F,G}$ de E tel que :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad P_{F,G}(x + y) = x.$$

- On notera \mathbb{N}_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit f un endomorphisme de E .

On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} e = p + q \\ f = a.p + b.q \\ f^2 = a^2.p + b^2.q. \end{cases}$$

1° Calculer $(f - a.e) \circ (f - b.e)$. En déduire que f est diagonalisable.

2° a) Établir : $p \circ q = q \circ p = 0$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

b) Montrer : $S_P(f) = \{a, b\}$.

c) On suppose que $ab \neq 0$. Démontrer que f est bijective et que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad f^m = a^m.p + b^m.q.$$

3° Démontrer que p est le projecteur sur $\text{Ker}(f - a.e)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - b.e)$ et que q est le projecteur sur $\text{Ker}(f - b.e)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - a.e)$.

4° On pose $F = \{x.p + y.q \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$.

a) Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F .

c) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

5° Exemple : On pose

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I et J .

b) Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = a^m B + b^m C.$$

c) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

II

Soit : p_1, p_2, \dots, p_n n endomorphismes non nuls de E , x_1, x_2, \dots, x_n n nombres complexes distincts, et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \sum_{k=1}^n x_k^m \cdot p_k.$$

1° Montrer : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(f) = \sum_{k=1}^n P(x_k) \cdot p_k.$

2° On pose $\Pi = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\Pi_l = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq l}} (X - x_k)$ et $L_l = \frac{1}{\Pi_l(x_l)} \Pi_l.$

a) Calculer $\Pi(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

b) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}_n, p_k = L_k(f)$. Vérifier que :

$$\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, \quad p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ p_k & \text{si } k = l. \end{cases}$$

c) Démontrer que $S_p(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$

3° Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}_n$: p_k est le projecteur sur $\text{Ker}(f - x_k \cdot e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \text{Ker}(f - x_l \cdot e).$

4° On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f) \cap F.$

c) Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ?

[On précisera le nombre de ces projecteurs et les éléments caractéristiques de chaque projecteur.]

5° On suppose $n = N.$

a) Démontrer $(\forall g \in \mathcal{L}(E)) [g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in F].$

b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f).$

6° Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que $S_p(h) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$

Démontrer qu'il existe n endomorphismes non nuls de E q_1, q_2, \dots, q_n tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad h^m = \sum_{k=1}^n x_k^m \cdot q_k.$$

7° Exemple : On considère la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de $\Lambda.$

b) Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices : $\Lambda_1 = L_1(\Lambda)$, $\Lambda_2 = L_2(\Lambda)$ et $\Lambda_3 = L_3(\Lambda).$

c) Déterminer en fonction de Λ_1, Λ_2 et Λ_3 toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \Lambda.$

III

Soit u un endomorphisme u de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0.$

1° a) Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X].$ Établir $(P(u) = 0 \Leftrightarrow X^n \text{ divise } P).$

c) Démontrer que $\left(\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Rightarrow n \leq \frac{N+1}{2} \right).$

2° a) Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

b) On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

On prend dans la suite du problème $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega P_n \left(\frac{X}{\omega^2} \right)$.

3° a) Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

b) Établir $\mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e) \neq \emptyset$.

4° On suppose $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre. On suppose que $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e)$.

a) Démontrer que g commute avec u .

b) Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = (P(u))(x)$. Établir $g = P(u)$.

c) Démontrer que $\mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e) = \{Q_{n,\omega}(u), -Q_{n,\omega}(u)\}$.

5° Application : Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

6° On suppose que $n \geq 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Démontrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

7° Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices qui commutent avec A .

b) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^n (x_k - X)^{\alpha_k}$$

où x_1, x_2, \dots, x_n sont les valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

On pose $E_k = \text{Ker}[(f - x_k \cdot e)^{\alpha_k}]$ et on rappelle que $\bigoplus_{1 \leq k \leq n} E_k = E$.

1° a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Φ_f de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

b) Démontrer que Φ_f s'écrit $\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{\beta_k}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}_n, 1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

2° Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, g(E_k) \subset E_k.$$

3° Établir :

a) $\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2} \right] \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$.

b) $0 \notin S_p(f) \Rightarrow \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

c) Démontrer que dans le cas où $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geq 2$: ($\mathcal{R}(f) = \emptyset$) ou ($\mathcal{R}(f)$ possède une infinité d'éléments).

4° On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}_n, \alpha_k = \beta_k$.

a) Démontrer que si $0 \notin S_p(f)$ alors $\text{card}(\mathcal{R}(f)) = 2^n$.

b) On suppose $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$. Démontrer que $\text{card}(\mathcal{R}(f)) = 2^{n-1}$.

ENSI 88, 2^{comp}. "Proj. spectraux d'un endomorphisme diagonalisable ;
racine carrée d'un endomorphisme".

programme abordé : endomorphismes, projecteurs, matrices d'un endomorphisme,
sommes directes de sev, polynômes caractéristiques et minimaux.

Corrigé de Dany-Jack MERCIER

$$\begin{aligned} \boxed{\text{I.1}} \quad (\beta - a)(\beta - b) &= \beta^2 - (a+b)\beta + ab \\ &= a^2p + b^2q - (a+b)(ap+bq) + ab \\ &= ab(e - p - q) = 0 \end{aligned}$$

β annule le polynôme $(X-a)(X-b)$ scindé et dont toutes les racines sont simples. Donc β sera diagonalisable.

$\boxed{\text{I.2.a}}$ $\beta - ae = (b-a)q$ et $\beta - be = (a-b)p$, de sorte que $(\beta - ae)(\beta - be) = -(a-b)^2 qp = 0$ et $qp = 0$. Comme $\beta - ae$ et $\beta - be$ commutent, le même raisonnement donne $pq = 0$.

Ensuite :

$$e = p + q \Rightarrow p = p^2 + pq = p^2$$

$$e = p + q \Rightarrow q = pq + q^2 = q^2$$

p et q seront donc des projecteurs. On sait même que $p^2 = p$ entraîne que p est la projection vectorielle sur $\ker(p - e)$ parallèlement à $\ker p$.

$\boxed{\text{I.2.b}}$ * I.1 montre que $\text{Sp}(\beta) \subset \{a, b\}$. En effet, si λ est une valeur propre de β associée au vecteur propre $x \neq 0$, on a :

$$(\beta - a)(\beta - b)(x) = 0$$

$$(\lambda - a)(\lambda - b)x = 0$$

$$(\lambda - a)(\lambda - b) = 0$$

$$\text{donc } \lambda \in \{a, b\}$$

* Réc., supposons $\text{Sp}(\beta) = \{a\}$. Alors, β étant diagonalisable, $\beta = ae$ donc $\beta = a(p+q) = ap + bq$ entraîne $aq = bq$, ce qui est absurde puisque $a \neq b$.

De même $\text{Sp}(\beta) \neq \{b\}$. Donc $\text{Sp}(\beta) = \{a, b\}$.

$\boxed{\text{I.2.c}}$

* β sera bijective puisque 0 n'est pas valeur propre de β , le spectre de β étant $\text{Sp}(\beta) = \{a, b\}$ et $ab \neq 0$.

* Comme $pq=0$, une récurrence facile montre que :

$$\beta = a^m p + b^m q \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } \beta \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} \right) = (ap + bq) \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} \right) = e$$

$$\text{d'où que } \beta^{-1} = \frac{p}{a} + \frac{q}{b}$$

$$\text{Si } m \in \mathbb{N}, \quad \beta^{-m} = (\beta^{-1})^m = \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} \right)^m = \frac{p^m}{a^m} + \frac{q^m}{b^m} = a^{-m} p + b^{-m} q$$

comme prévu.

I.3 On a $\beta = (a-b)p + be$, d'où :

$$\begin{aligned} * x \in \text{Ker}(\beta - ae) &\Leftrightarrow \beta(x) = ax = (a-b)p(x) + bx \\ &\Leftrightarrow p(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * x \in \text{Ker}(\beta - be) &\Leftrightarrow \beta(x) = bx = (a-b)p(x) + bx \\ &\Leftrightarrow p(x) = 0. \end{aligned}$$

p étant un projecteur, ce sera la projection sur $\text{Ker}(\beta - ae) // \tilde{a}$ $\text{Ker}(\beta - be)$.

I.4.a

* F est un \mathbb{C} -espace vectoriel :

$$\beta, \gamma \in F \quad \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \beta + \lambda \gamma \in F$$

F est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ car $pq=qp=0$ entraîne :

$$\forall \beta, \gamma \in F \quad \beta \circ \gamma \in F \text{ et } \gamma \circ \beta \in F$$

* $\dim F = 2$ car (p, q) constitue une base de F . En effet :

$$x p + y q = 0 \Rightarrow p(x p + y q) = 0 \Rightarrow x p = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{puisque } p \neq 0)$$

$$\text{donc } y q = 0, \text{ puis } y = 0.$$

NB : $e = p + q$ appartient à F , donc F est bien une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{L}(E)$.

I.4.b

$$(xp + yq)^2 = xp + yq \Leftrightarrow x^2p + y^2q = xp + yq \Leftrightarrow x^2 = x \text{ et } y^2 = y \\ \Leftrightarrow x, y \in \{0, 1\}$$

Les projecteurs de F sont $0, p, q, p+q = e$

I.4.c

$$g \in \mathcal{R}(f) \cap F \Leftrightarrow g = xp + yq \text{ et } (xp + yq)^2 = \beta$$

$$\text{d'où } x^2p + y^2q = ap + bq$$

$$\text{ie } x^2 = a \text{ et } y^2 = b$$

$$\text{ie } x = \pm\sqrt{a} \text{ et } y = \pm\sqrt{b}$$

I.5.a

On vérifie par récurrence : $J^m = 3^{m-1} \cdot J$ pour $m \geq 1$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$A^m = (I + J)^m = I + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} J^k = I + \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 3^{k-1} \right) J$$

$$= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 3^k \right) J = I + \frac{1}{3} [-1 + (1+3)^m] J$$

$$A^m = I + \frac{4^m - 1}{3} J$$

I.5.b On écrit $A^m = \left(I - \frac{J}{3} \right) + 4^m \frac{J}{3}$, qui est de la

forme demandée avec :

$$a = 1 \quad b = 4 \quad B = I - \frac{J}{3} \quad \text{et} \quad C = \frac{J}{3}$$

NB : $B^2 = B$ et $C^2 = C$. On vérifie aussi les 3 propriétés de l'introduction qui font que B et C jouent ici le rôle de p et q .

I.5.c D'après I.3.c, $M^2 = A$ sera en particulier vérifié avec

les 4 matrices $M = \epsilon B + 2\epsilon' C$, où $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$

II.1 Notons $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$

$$P(\beta) = \sum_{i=0}^d a_i \beta^i = \sum_{i=0}^d \sum_{k=1}^n a_i x_k^i p_k = \sum_{k=1}^n P(x_k) \cdot p_k$$

II.2.a D'après la question précédente :

$$\pi(\beta) = \sum_{k=1}^n \pi(x_k) \cdot p_k = 0$$

β annule donc le polynôme scindé $\pi(X)$ dont toutes les racines sont simples. On déduit que β est diagonalisable. On peut aussi en déduire que :

$$\text{Sp}(\beta) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$$

II.2.b

$$* \quad L_k(\beta) = \frac{1}{\pi_k(x_k)} \pi_k(\beta) \quad \text{où} \quad \pi_k(\beta) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\pi_k(x_i)}_{=0 \text{ si } i \neq k} p_i = \pi_k(x_k) \cdot p_k$$

donc $L_k(\beta) = p_k$

$$* \quad p_k \circ p_\ell = L_k(\beta) \circ L_\ell(\beta) = (L_k \cdot L_\ell)(\beta)$$

Si $k \neq \ell$, il existe un polynôme R tel que $L_k \cdot L_\ell = R \cdot \pi$, et :

$$p_k \circ p_\ell = (R \cdot \pi)(\beta) = R(\beta) \circ \pi(\beta) = 0 \quad \text{car } \pi(\beta) = 0.$$

Ainsi : $p_k \circ p_\ell = 0 \text{ si } k \neq \ell$

$$* \quad \text{On a } e = p_1 + \dots + p_n \quad \text{d'où} \quad p_k = p_1 p_k + \dots + p_k^2 + \dots + p_n p_k = p_k^2$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

2 solution: $p_R \circ p_R = L_R(\beta) \circ L_R(\beta)$

$$L_R(\beta) = \frac{1}{\pi_R(\alpha_R)} \pi_R(\beta) \text{ entraîne } (\beta - \alpha_R e) \circ L_R(\beta) = \frac{1}{\pi_R(\alpha_R)} \pi(\beta) = 0$$

d'où $\beta \circ L_R(\beta) = \alpha_R L_R(\beta)$

On aura aussi $\beta^2 \circ L_R(\beta) = \beta \circ (\alpha_R L_R(\beta)) = \alpha_R (\beta \circ L_R(\beta)) = \alpha_R^2 L_R(\beta)$

Par linéarité, on obtient alors :

$$\begin{aligned} L_R(\beta) \circ L_R(\beta) &= L_R(\alpha_R) \cdot L_R(\beta) \\ &= L_R(\beta) \quad \text{puisque} \quad L_R(\alpha_R) = 1 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

II.2.c

* On a vu que $Sp(\beta) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ en II.2.a.

* S'il existe k tel que $\alpha_k \notin Sp(\beta)$, $\beta - \alpha_k e$ sera inversible et

$$\pi(\beta) = (\beta - \alpha_k e) \circ \pi_R(\beta) = 0$$

entraîne $\pi_R(\beta) = 0$, soit $p_R = 0$. C'est absurde.

II.3

$$p_R(x) = L_R(\beta)(x) = \frac{1}{\pi_R(\alpha_R)} \pi_R(\beta)(x) = \frac{1}{\pi_R(\alpha_R)} \prod_{i \neq R} (\beta - \alpha_i e)(x) \quad (*)$$

* Si $x \in \bigoplus_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq R}} \text{Ker}(\beta - \alpha_l e)$, alors $p_R(x) = 0$ puisque l'un des termes

du produit (*) est nul (les endomorphismes intervenant dans le produit $\prod_{i \neq R} (\beta - \alpha_i e)$ commutent entre eux...)

* Si $x \in \text{Ker}(\beta - \alpha_R e)$, (*) donne :

$$p_R(x) = \frac{1}{\pi_R(\alpha_R)} \prod_{i \neq R} (\alpha_R - \alpha_i) x = x$$

ce qui prouve que, p_R étant un projecteur d'après II.2.b, p_R est la projection sur $\text{Ker}(\beta - \alpha_R e) \parallel_a V_R$ (puisque β étant diagonalisable de v.p. α_R , on a $E = \bigoplus_{R \in \mathcal{R}_n} \text{Ker}(\beta - \alpha_R e)$)

$$\boxed{\text{II.4.a}} \quad \sum \alpha_k p_k = 0 \Rightarrow p_i(\sum \alpha_k p_k) = \alpha_i p_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$$

Donc $\dim F = n$

$\boxed{\text{II.4.b}}$ Si $g \in \mathcal{R}(\beta) \cap F$, alors $g^2 = \beta$ et $g = \sum \alpha_k p_k$. D'où :

$$\sum \alpha_k^2 p_k = \sum \alpha_k p_k \Leftrightarrow \alpha_k^2 = \alpha_k \quad \forall k$$

$$\text{Donc } \# \mathcal{R}(\beta) \cap F = \begin{cases} 2^n & \text{si } \alpha_1 \dots \alpha_n \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } \alpha_1 \dots \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{II.4.c}}$ $g = \sum \alpha_k p_k$ est un projecteurssi $g^2 = g$, ie $\sum \alpha_k^2 p_k = \sum \alpha_k p_k$

On trouve $\alpha_k^2 = \alpha_k$ pour tout k , soit $\alpha_k \in \{0, 1\}$. Il y a donc 2^n projecteurs dans F

* $\underline{g = \sum_{k \in K} p_k}$, où $K \subset \{1, \dots, n\}$, sera la projection sur $\bigoplus_{i \in K} \text{Ker}(\beta - x_i e)$

parallèlement à $\bigoplus_{i \notin K} \text{Ker}(\beta - x_i e)$:

En effet, en décomposant le vecteur u ainsi :

$$u = \sum_{i \in K} u_i + \sum_{i \notin K} u_i$$

dans la somme directe $E = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{Ker}(\beta - x_i e)$, on obtient,

compte tenu de $\text{Ker}(\beta - x_i e) = \text{Im } p_i = \text{Im } p_i$ et $p_k \circ p_l = \delta_{kl} p_k$:

$$g(u) = \sum_{i \in K} g(u_i) + \sum_{i \notin K} g(u_i)$$

$$g(u) = \sum_{i \in K} \sum_{k \in K} p_k(u_i) + \sum_{i \notin K} \sum_{k \in K} p_k(u_i)$$

$$g(u) = \sum_{i \in K} u_i$$

CQFD

II.5.a

$$* g \in F \Rightarrow g = \sum \alpha_k p_k$$

$$\text{On a } \begin{cases} g \circ f = \sum \alpha_k p_k \circ f \\ f \circ g = \sum \alpha_k f \circ p_k \end{cases} \quad \text{et } p_k \circ f = f \circ p_k \text{ puisque } f = \sum x_k p_k.$$

On en déduit bien $g \circ f = f \circ g$

* Réc., supposons $g \circ f = f \circ g$. f est diagonalisable, et

$$E = \bigoplus_{i \in I_n} \text{Ker}(f - x_i e)$$

Si $n = N$ donc $\dim \text{Ker}(f - x_i e) = 1$. Notons (v_1, \dots, v_n) une base de vecteurs propres :

$$g \circ f(v_j) = f \circ g(v_j)$$

$$\text{donc } x_j g(v_j) = f \circ g(v_j)$$

$$\text{et } g(v_j) \in \text{Ker}(f - x_j e)$$

Notons alors $\boxed{g(v_j) = a_j v_j}$ (ie la matrice de g est diagonale

dans la base (v_1, \dots, v_n)).

$$\text{Si } u = \sum_i \alpha_i v_i, \quad g(u) = \sum_i \alpha_i a_i v_i = \sum_i a_i p_i(u) \text{ de}$$

$$\text{sorte que } \boxed{g = \sum a_i p_i \in F}$$

Solution : Matricielle. La matrice de f dans une base (v_1, \dots, v_n) tq $v_i \in \text{Ker}(f - x_i e)$ est $\text{Diag}(x_1, \dots, x_n)$. Donc $f \circ g = g \circ f$ se traduit par

$$\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est la matrice de g dans (v_1, \dots, v_n) . En égalant les coefficients ligne-j colonne de ces 2 matrices, on obtient $x_i a_{ij} = a_{ij} x_j \Rightarrow a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ donc $g = \sum a_{ii} p_i \in F$. C.F.D

II.5.b Si $\mathcal{R}(f) \cap F = \mathcal{R}(f)$, puisque :

$$g \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow g^2 = f \Rightarrow g \circ f = g^3 = f \circ g \iff g \in F$$

II.5.a

En utilisant II.4.b :

$$\# \mathcal{R}(f) = \begin{cases} 2^n & \text{si } x_1 \dots x_n \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } x_1 \dots x_n = 0 \end{cases}$$

II.6 Es une somme directe des n espaces propres $\text{Ker}(h - x_k e)$. Notons q_k la projection sur $\text{Ker}(h - x_k e)$ parallèlement à $\bigoplus_{l \neq k} \text{Ker}(h - x_l e)$.

On constate que :

$$q_k \circ q_l = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

$$q_k^2 = q_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_n$$

Si $u = \sum_{k=1}^n u_k$ est la décomposition de u , avec $u_k \in \text{Ker}(h - x_k e)$,

$$\text{alors } h(u) = \sum x_k u_k = \sum x_k q_k(u) \quad \text{donc } h = \sum_{k=1}^n x_k q_k.$$

Il est ensuite facile de voir que $h^n = \sum_{k=1}^n x_k^n q_k$.

$$\text{II.7.a} \quad \chi_\Lambda(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X+1 & 1 & -1 \\ 1-X & -X & -1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$= X(1-X)(X+1) \quad \text{en développant suivant la 1^{ère} colonne.}$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(\Lambda) = \{0, -1, 1\}$$

II.7.b Posons $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$

$$\pi_1 = X(X-1) \quad \text{et} \quad L_1 = \frac{1}{2} \pi_1$$

$$\pi_2 = (X+1)(X-1) \quad \text{et} \quad L_2 = -\pi_2$$

$$\pi_3 = (X+1)X \quad \text{et} \quad L_3 = \frac{1}{2} \pi_3$$

$$\text{Donc } \Lambda_1 = L_1(\Lambda) = \frac{1}{2} \Lambda(\Lambda - \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2 = L_2(\Lambda) = -(\Lambda + \mathbf{I})(\Lambda - \mathbf{I}) = 1 - \Lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda_3 = L_3(\Lambda) = \frac{1}{2}(\Lambda + \mathbf{I})\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.7.c Les Λ_k jouent le rôle des p_k . On applique donc le II.5.b : $M^2 = \Lambda \Leftrightarrow M = \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2 + \alpha_3 \Lambda_3$ avec $\alpha_1^2 = -1$, $\alpha_2^2 = 0$ et $\alpha_3^2 = 1$.

Donc $M^2 = \Lambda \Leftrightarrow M = \pm i \Lambda_1 \pm \Lambda_3$. Il y a 4 solutions.

III.1.a Soit n un entier tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Considérons :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$$

En appliquant u^{n-1} : $\alpha_0 u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

En appliquant u^{n-2} : $\alpha_1 u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

et, de proche en proche : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

III.1.b

* Si $X^n \mid P$, $P = Q \cdot X^n$ et $P(u) = Q(u) \cdot u^n = 0$

* Réciproquement, si $P(u) = 0$, soit $P(X) = Q(X) \cdot X^n + R(X)$, $\deg R < n$, la division euclidienne de P par X^n . Comme $P(u) = 0$ et $u^n = 0$, on obtient

$$R(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0 \quad (*)$$

Il suffit de choisir x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ et d'observer que (*) entraîne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x) = 0$$

pour conclure à $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$ d'après III.1.a.

Donc $P(X) = \sum_{k \geq n} a_k X^k$ sera divisible par X^n .

III.1.c

Si $g \in \mathcal{R}(u)$, $g^2 = u$ donc $g^{2n} = u^n = 0$ et $g^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$.
 g est ainsi nilpotent d'ordre $2n$ ou $2n-1$. Dans les 2 cas, on a vu qu'il existait $x \in E$ tel que la famille

$$(x, g(x), \dots, g^{2n-2}(x))$$

soit libre (III.1.a).

Donc : $2n-1 \leq N$

$$n \leq \frac{N+1}{2}$$

III.2.a

$(1+x)^{1/2}$ est développable en série entière sur son disque de convergence $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)] x^k \end{aligned}$$

III.2.b

On a $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \cdot R(x)$ où $R(x)$ est une série entière. Donc :

$$1+x = P_n^2(x) + x^{2n} R^2(x) + 2x^n P_n(x) R(x)$$

$$\begin{aligned} P_n^2(x) - x - 1 &= x^n (-2 P_n(x) R(x) - x^n R^2(x)) \\ &= x^n Q(x) \end{aligned}$$

où $Q(x)$ est, a priori, une série entière. Comme P_n est un polynôme, $Q(x)$ sera aussi un polynôme et x^n divisera $P_n^2 - x - 1$.

III.3.a *

On a vu, au III.2.b, que $X^n \mid P_n^2(X) - X - 1$, donc :

$$\frac{X^n}{\omega^{2n}} \mid P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - \frac{X}{\omega^2} - 1$$

soit $X^n \mid \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2$

Pour $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on aura alors :

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X^n \mid \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2 \\ X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow X^n \mid Q^2 - \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow X^n \mid \left(Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)\right)\left(Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)\right) \quad (*)$$

X ne peut pas diviser simultanément $Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$ et $Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$ (sinon, $Q(0) - \omega = 0 = Q(0) + \omega$). Donc (*) équivaut à :

$$X^n \mid Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right) \quad \text{ou} \quad X^n \mid Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

ce qui, compte tenu de $\deg Q \pm \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right) \leq n-1$, équivaut à :

$$Q = \pm \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

III.3.b Le a) assure l'existence de $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$Q^2 - X - \omega^2 = X^n T(X) \quad \text{avec } T \in \mathbb{C}[X]$$

d'où $Q^2(u) - u - \omega^2 e = 0$

$$Q^2(u) = u + \omega^2 e$$

ce qui montre que $Q(u) \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e)$ et $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) \neq \emptyset$.

$$\boxed{\text{III.4.a}} \quad g^2 = u + \omega^2 e \Rightarrow g u = g(g^2 - \omega^2 e) = g^3 - \omega^2 g \\ = (g^2 - \omega^2 e) g = u g$$

$\boxed{\text{III.4.b}}$ Soit $n = N$, donc $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E dans laquelle $g(x)$ s'exprime :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)$$

Posons $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$. On vient de voir que $g(x) = P(u)x$, ce qui entraîne à son tour :

$$g(u^k(x)) = u^k g(x) = u^k P(u)(x) = P(u)(u^k(x))$$

de sorte que g et $P(u)$, coïncidant sur chacun des vecteurs de la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, soient égaux.

$\boxed{\text{III.4.c}}$ D'après le b) :

$$g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e) \Leftrightarrow \begin{cases} g = P(u) \\ P^2(u) = u^2 + \omega^2 e \end{cases}$$

et :

$$P^2(u) = u^2 + \omega^2 e \Leftrightarrow \underset{(\text{III.1.b})}{X^n \mid P^2(X) - X - \omega^2} \Leftrightarrow \underset{(\text{III.3.a})}{P \in \{\pm Q_{n,\omega}\}}$$

permet de conclure à :

$$g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e) \Leftrightarrow g = \pm Q_{n,\omega}(u)$$

III.5 $A = U + I$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 4.

III.4. c montre que $M^2 = A$ ssi M est la matrice de $\pm Q_{4,1}(u)$, où u désigne l'endomorphisme de matrice U et :

$$Q_{4,1}(X) = P_4(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3$$

On calcule $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$M = \pm Q_{4,1}(u) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

III.6 Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = u$. On sait que :

$$u^n = 0, \quad u^{n-1} \neq 0 \quad \text{donc} \quad g^{2n} = 0 \quad \text{et} \quad g^{2n-2} \neq 0.$$

* 1^{er} cas : Si $g^{2n} = 0$ et $g^{2n-1} \neq 0$, $h = g + \lambda g^{2n-1}$ (où $\lambda \in \mathbb{C}$)

vérifie :

$$h^2 = g^2 + 2\lambda g^{2n} + \lambda^2 g^{2(2n-1)} = u \quad \text{car} \quad 2(2n-1) \geq 2n$$

* 2nd cas : Si $g^{2n-1} = 0$ et $g^{2n-2} \neq 0$, $h = g + \lambda g^{2n-2}$ vérifie :

$$h^2 = g^2 + 2\lambda g^{2n-1} + \lambda^2 g^{2(2n-2)} = u \quad \text{car} \quad 2(2n-2) \geq 2n.$$

Dans tous les cas, il y a une infinité de solutions de l'équation $g^2 = u$.

III.7.a
$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $d = f = g = 0$ et $a = e$. Ainsi :

$$MA = AM \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} \quad (\text{où } a, b, c, h, i \in \mathbb{C})$$

III.7.b Si $M^2=A$, alors M commute avec A , de sorte que l'on cherche les M vérifiant $M^2=A$ parmi les matrices exhibées en a).

$$M^2=A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} = A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab+hc & a^2 & ah+hi \\ ac+ic & 0 & i^2 \end{pmatrix} = A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=i=0 \\ hc=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & \frac{1}{c} \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } (b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

IV.1.a $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)=0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{C}[X]$, donc sera engendré par un seul polynôme unitaire Φ_f .
 Φ_f s'appelle d'ailleurs le polynôme minimal de l'endomorphisme f .

IV.1.b Le Théorème de Cayley-Hamilton assure que $P_f(f)=0$, et donc que Φ_f divise P_f . Ainsi :

$$\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{\beta_k} \quad \text{avec } 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

Reste à montrer que $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout k :

1^{re} solution : Si l'on avait $\beta_1=0$, notons y un vecteur propre associé à la valeur propre x_1 . On aurait :

$$\Phi_f(f)=0 \Rightarrow \prod_{k=2}^n (f - x_k e)^{\beta_k}(y) = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^n (x_1 - x_k)^{\beta_k} \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$$

ce qui est absurde.

2^e solution : Si $\beta_1 = 0$, $\chi_f(X) = \prod_{k=2}^n (X - \alpha_k)^{\beta_k}$ et le th. de décomposition par blocs entraîne

$$E = \bigoplus_{k=2}^n \text{Ker} (f - \alpha_k e)^{\beta_k}$$

$$\text{or } E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker} (f - \alpha_k e)^{\alpha_k} \quad \text{via le même Théorème.}$$

Nécessairement $\text{Ker} (f - \alpha_1 e)^{\alpha_1} = \{0\}$ donc $\text{Ker} (f - \alpha_1 e) = \{0\}$, ce qui contredit le fait que α_1 soit une valeur propre de f .

IV.2 Si $g^2 = f$, g commutera avec f , donc aussi avec $f - \alpha_k e$. Soit $u \in E_k$. On a :

$$(f - \alpha_k e)^{\alpha_k} (g(u)) = g \circ (f - \alpha_k e)^{\alpha_k} (u) = 0$$

ce qui prouve que $g(u) \in E_k$. D'où $g(E_k) \subset E_k$.

IV.3.a

$\alpha_1 = 0$ est valeur propre de f , donc $f|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$ sera nilpotent d'indice β_1 (cf lemme 1 ci-dessous).

III.1.c s'applique à l'endomorphisme $f|_{E_1}$ de E_1 :

$$\beta_1 > \frac{\dim E_1 + 1}{2} \Rightarrow \mathcal{R}(f|_{E_1}) = \emptyset \quad (*)$$

On sait que $\dim E_1 = \alpha_1$ (cf lemme 2)

De plus $g \in \mathcal{R}(f) \xrightarrow{(IV.2)} g|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$ et $g|_{E_1} \in \mathcal{R}(f|_{E_1})$,

donc compte tenu de (*), on aura :

$$\beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2} \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$$

|| Lemme 1: β_1 est l'indice de nilpotence de $f|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$.

preuve: Le Théorème de décomposition des noyaux (ou encore "Th. de réduction par blocs") montre que

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker } f^{\alpha_1} \oplus \bigoplus_{k=2}^n \text{Ker } (f - \pi_k e)^{\alpha_k} \\ &\quad \cup \quad \cup \\ E &= \text{Ker } f^{\beta_1} \oplus \bigoplus_{k=2}^n \text{Ker } (f - \pi_k e)^{\beta_k} \end{aligned}$$

d'où immédiatement

$$\text{Ker } f^{\beta_1} = \text{Ker } f^{\alpha_1} = E_1$$

Si l'on suppose, par l'absurde, que $\text{Ker } f^{\beta_1-1} = E_1$, alors

$$E = \text{Ker } f^{\beta_1-1} \oplus \bigoplus_{k=2}^n \text{Ker } (f - \pi_k e)^{\beta_k}$$

Si l'on note $u \in E$, $u = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k$ où $\begin{cases} u_1 \in \text{Ker } f^{\beta_1-1} \\ u_k \in \text{Ker } (f - \pi_k e)^{\beta_k} \end{cases}$

on obtient :

$$f^{\beta_1-1} \circ \prod_{k=2}^n (f - \pi_k e)^{\beta_k} (u) = 0$$

donc $X^{\beta_1-1} \prod_{k=2}^n (X - \pi_k)^{\beta_k}$ annule f sans être

divisible par le polynôme minimal \mathbb{P}_f . C'est absurde.

Conclusion : $\text{Ker } f^{\beta_1} = E_1$ et $\text{Ker } f^{\beta_1-1} \neq E_1$

soit
$$\underline{(f|_{E_1})^{\beta_1} = 0 \quad \text{et} \quad (f|_{E_1})^{\beta_1-1} \neq 0}$$

CQFD

NB: la même démonstration montre que l'indice de nilpotence de $f|_{E_k}$ est β_k .

Lemme 2 : $\dim E_k = \alpha_k$, ie "la dimension du s.e. caractéristique associé à la valeur propre π_k est égale à la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique".

preuve: Vu le Th. de décomposition par blocs, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$$

et dans une base adaptée, β admet la matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \text{dim } E_1 & \\ \hline \begin{matrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & x_1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} x_2 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & x_2 \end{matrix} & \dots \end{array} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{dim } E_1 \\ \updownarrow \text{dim } E_2 \\ \vdots \end{matrix}$$

Le polynôme caractéristique de β s'écrit donc $P_\beta(X) = \prod_{k=1}^n (x_k - X)^{\dim E_k}$.

Comme $P_\beta(X) = \prod_{k=1}^n (x_k - X)^{\alpha_k}$, on déduit : $\dim E_k = \alpha_k$ pour tout k .

CQFD

IV.3.b

$0 \notin \text{Sp}(\beta)$ signifie qu'aucun des x_k est nul. Notons β_k la restriction de β à E_k , à valeurs dans E_k , et rappelons que $E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$.

$E_k = \text{Ker}(\beta - x_k e)^{\alpha_k}$ montre que $\beta_k - x_k e \doteq u_k$ est nilpotente et permet d'appliquer le III.3.b :

$$\mathcal{R}(u_k + \omega^2 e) \neq \emptyset \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}^*$$

Prenons ω tel que $\omega^2 = x_k$:

$$\mathcal{R}(\beta_k) \neq \emptyset$$

Il existe donc $g_k \in \mathcal{L}(E_k)$ tel que $g_k^2 = \beta_k$.

Il suffit de définir $g \in \mathcal{L}(E)$ par $g|_{E_k} = g_k$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, pour obtenir $g^2 = \beta$, et $\mathcal{R}(\beta) \neq \emptyset$.

IV.3.c

Supposons $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 \geq 2$ et $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, et montrons que $\mathcal{R}(f)$ est infini.

Il existe $g \in \mathcal{R}(f)$. Alors $g(E_k) \subset E_k$ (IV.2) permet de définir les endomorphismes $g_k = g|_{E_k}$ de E_k tels que $g_k^2 = f_k$.

En particulier, $g_1^2 = f_1$ donc $\mathcal{R}(f_1) \neq \emptyset$. f_1 étant nilpotent, et $\dim E_1 = \alpha_1 \geq 2$, III.6 entraîne que $\mathcal{R}(f_1)$ est infini.

Enfin, chaque $h \in \mathcal{R}(f_1)$ permet de construire un endomorphisme $g_h \in \mathcal{R}(f)$ en posant :

$$g_h|_{E_1} = f_1, \text{ et } g_h|_{E_k} = g_k \text{ pour } k \neq 1$$

$\mathcal{R}(f)$ sera bien infini.

IV.4.a

$u_k \doteq f_k - x_k e$ est nilpotente d'indice $\beta_k = \alpha_k$, et $\alpha_k = \dim E_k$. On est donc dans le cas du III.4 et :

$$\# \mathcal{R}(f_k) = \# \mathcal{R}(u_k + x_k e) = 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}_n$$

Donc $\# \mathcal{R}(f) = 2^n$

IV.4.b Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, le calcul du a) est encore valable pour $k = 2, \dots, n$, mais il reste à préciser $\# \mathcal{R}(f_1)$. $\alpha_1 = 1 = \dim E_1$ et $f_1 = 0$.

Si $g_1^2 = f_1 = 0$, alors $g_1 = 0$ (en effet, en notant $g_1(u) = \lambda u$ on obtient $\lambda^2 u = 0$ donc $\lambda = 0$ et $g_1 = 0$) de sorte que $\mathcal{R}(f_1) = \{0\}$.

Finalement $\# \mathcal{R}(f) = \prod_{k=1}^n \# \mathcal{R}(f_k) = 2^{n-1}$

FIN

NOTES:

• Seconde démonstration de [III.3.a] :

On démontre l'équivalence lorsque $\omega = 1$, puis on ramène le cas où $\omega \neq 1$ à celui où $\omega = 1$.

|| Cas où $\omega = 1$:

$$X^n \mid Q^2 - X - 1 \Leftrightarrow Q = \pm P_n$$

preuve :

(\Leftarrow) fait en III.2.b.

(\Rightarrow) Si $X^n \mid Q^2 - X - 1$, compte tenu de $X^n \mid P_n^2 - X - 1$, on obtient :

$$X^n \mid Q^2 - P_n^2 = (Q - P_n)(Q + P_n) \quad (*)$$

Si $X^n \nmid Q - P_n$ et $X^n \nmid Q + P_n$, alors X diviserait $Q - P_n$ et $Q + P_n$, ce qui entraîne $Q(0) - P_n(0) = 0 = Q(0) + P_n(0)$, donc $P_n(0) = 0$, absurde car $P_n(0) = 1$.
Donc $X^n \mid Q - P_n$ ou $X^n \mid Q + P_n$. Comme $\deg(Q \pm P_n) \leq n-1$, cela entraîne bien $Q - P_n = 0$ ou $Q + P_n = 0$, soit $Q = \pm P_n$. \square

|| Cas général où $\omega \neq 1$:

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \Leftrightarrow Q = \pm Q_{n,\omega}$$

preuve :

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \Leftrightarrow X^n \mid \frac{1}{\omega^2} Q^2(X) - \frac{X}{\omega^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow Y^n \mid \frac{1}{\omega^2} Q^2(\omega^2 Y) - Y - 1 \quad (\text{on a posé } Y = \frac{X}{\omega^2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega} Q(\omega^2 Y) = \pm P_n(Y) \quad (\text{d'après le cas où } \omega = 1)$$

$$\Leftrightarrow Q(X) = \pm \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

\square